

О возможности имплементации такой функции коллективного выбора, как объединение минимальных внешнеустойчивых множеств, и о других ее полезных свойствах и возможностях применения

А.Н. Субочев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

asubochev@hse.ru

1. Введение

Основной задачей теории коллективного выбора является описание способов определения альтернатив, которые должны быть выбраны из числа имеющихся в наличии вариантов на основании мнения о них индивидуальных участников процесса принятия коллективных решений.

Математически выбор моделируется функцией выбора. В настоящем докладе рассматриваются три схожие функции, зависящие от коллективных предпочтений, моделируемых мажоритарным отношением: объединение минимальных P -доминирующих множеств MPD , объединения минимальных P - и R -внешнеустойчивых множеств $MPES$ и $MRES$. Они не привлекали большого внимания теоретиков коллективного выбора, однако анализ их свойств показывает, что две из них, а именно $MPES$ и $MRES$, могут быть полезными инструментами выбора (например, при построении агрегированный рейтингов), а их имплементация (в определенных обстоятельствах) возможна.

2. Модель

Дано общее множество альтернатив X . Далее оно полагается конечным, однако будет затронут вопрос об обобщении представленных результатов на случай бесконечных множеств. Группа лиц G , $|G|=n \geq 2$, принимает коллективные решения, которые сводятся к выбору альтернатив из непустого подмножества A множества X . Множество A рассматривается как переменная величина. Оно представляет совокупность доступных для выбора альтернатив и называется *предъявлением*.

Мнение отдельного участника процесса принятия коллективных решений $i, i \in G$, об альтернативах из X , определяющее его индивидуальный выбор, моделируется бинарным отношением P_i на X , $P_i \subseteq X \times X$, фиксирующим результаты попарного сравнения альтернатив. Если при сравнении пары альтернатив x и y участник i отдает предпочтение альтернативе x , то говорят, что упорядоченная пара (x, y) принадлежит отношению P_i или « x P_i -доминирует над y ». Отношение P_i называется строгими предпочтениями участника i . Если выбирающий не способен решить, какая из двух альтернатив лучше, или считает их равноценными, то предполагается, что он не предпочитает ни одну из них другой. Такие пары составляют отношение безразличия данного участника $I_i = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \notin P_i \ \& \ (y, x) \notin P_i\}$. Объединение отношений P_i и I_i называется нестрогими предпочтениями: $R_i = P_i \cup I_i$. Отношение $P_i|_A = P_i \cap A \times A$ называется сужением отношения P_i на предъявление A . Множество $\mathfrak{P} = \{P_i \mid i \in G\}$ называется *профилем* индивидуальных предпочтений группы G .

Коллективный выбор моделирует функция $SC(A, \mathfrak{P}): 2^X \setminus \emptyset \times (2^{X^2})^n \rightarrow 2^X$, аргументами которой являются предъявление и профиль индивидуальных предпочтений, а значениями – подмножества предъявлений, соответствующие выбранным альтернативам. Предполагается, что функция коллективного выбора зависит от A и \mathfrak{P} через $\mathfrak{P}|_A = \{P_i|_A \mid i \in G\}$, $SC(A, \mathfrak{P}) = SC(\mathfrak{P}|_A)$, то есть, выбор не зависит от мнения участников об альтернативах недоступных для выбора.

На основании профиля индивидуальных предпочтений также можно определить отношение $P = P(\mathfrak{P})$, $P \subseteq X \times X$, моделирующее строгие коллективные предпочтения. Еще одно предположение, используемое в настоящей работе, состоит в том, что функция коллективного выбора зависит только от сужения коллективных предпочтений на предъявление: $SC(A, \mathfrak{P}) = SC(P(\mathfrak{P})|_A)$. Взятые вместе, первое и второе предположения требуют, чтобы операция агрегирования индивидуальных предпочтений в коллективные коммутировала с сужением на предъявление: $P(\mathfrak{P})|_A = P(\mathfrak{P}|_A)$. Это свойство процедуры агрегирования называется *независимостью от посторонних альтернатив по Эрроу* (Arrow 1951). Подразумевая наличие данного свойства, далее вместо $P(\mathfrak{P})|_A$ мы будем писать просто P .

Если функция выбора $SC(P)$ удовлетворяет аксиомам нейтральности (независимости выбора от имен альтернатив) и непустоты выбора, а также соответствует принципу Кондорсе,¹ то ее называют *турнирным решением* (Laslier 1997).

Функции выбора, рассматриваемые в докладе, являются турнирными решениями, зависящими от коллективных предпочтений P , определенных с помощью правила простого большинства: x P -доминирует над y , если число тех, кто предпочитает альтернативу x альтернативе y , больше числа тех, кто предпочитает альтернативу y альтернативе x , $xPy \Leftrightarrow |G_1| > |G_2|$, где $G_1 = \{i \in G \mid xPi\}$, $G_2 = \{i \in G \mid yPi\}$. Выбор этого правила агрегирования однозначно определяется рядом естественных аксиоматических условий (May 1952), в число которых входит независимость от посторонних альтернатив по Эрроу.

Из определения следует, что P асимметрично, $(x, y) \in P \Rightarrow (y, x) \notin P$. Если имеет место $(x, y) \notin P \wedge (y, x) \notin P$, то говорят, что x и y находятся в отношении равенства голосов T , $T \subseteq A \times A$, $(x, y) \in T \wedge (y, x) \in T$. Очевидно, что T - симметрично. Объединение P и T моделирует нестрогие коллективные предпочтения и обозначается R , $R = P \cup T$.

Выбор P -недоминируемой альтернативы в общем случае невозможен, так как таковых может не быть. Этот результат известен как «парадокс Кондорсе» (Condorcet 1785). Из-за него приходится вводить иные, нетривиальные принципы выбора наилучших вариантов. Исследуемые решения основаны на принципе выбора альтернатив, принадлежащих множеству с каким-либо «хорошим» свойством.

Подмножество B предъявления A называется

P -доминирующим, если $\forall x \in A, \exists y \in B: yPx$ (Duggan 2011),

P -внешнеустойчивым, если $\forall x \in A \setminus B, \exists y \in B: yPx$ (von Neumann & Morgenstern 1944),

R -внешнеустойчивым, если $\forall x \in A \setminus B, \exists y \in B: yRx$ (Aleskerov & Subochev 2009).

Множество называется минимальным относительно некоторого свойства, если ни одно из его подмножеств, кроме него самого, этим свойством не обладает. Наилучшей считается альтернатива, принадлежащая хотя бы одному минимальному множеству, поэтому решениями являются объединение минимальных P -доминирующих множеств MPD ;

¹ Принцип Кондорсе – это требование выбирать только альтернативу, P -доминирующую любую другую альтернативу, всегда, когда она существует.

объединение минимальных P -внешнеустойчивых множеств $MPES$ и объединение минимальных R -внешнеустойчивых множеств $MPES$.

Идея выбора минимального P -внешнеустойчивого множества впервые встречается в Wuffl et al. (1989). Однако авторы никак её не развивают и не используют.² Независимо от них и в другом контексте $MPES$ было определено Субочевым (Subochev 2008) по аналогии с другим решением – минимальным слабоустойчивым множеством, предложенным Алескеровым и Курбановым (Aleskerov & Kurbanov 1999). Минимальное R -внешнеустойчивое множество было введено Алескеровым и Субочевым (Aleskerov & Subochev 2009, 2013) по аналогии с $MPES$. Минимальное P -доминирующее множество вводится в настоящем исследовании.

3. Характеристические теоремы

В докладе представлены новые формулировки двух характеристических теорем, доказанных ранее в Subochev (2008) и Aleskerov & Subochev (2009, 2013), а также одна новая теорема, доказанная в ходе исследования. Эти теоремы связывают три рассматриваемых решения с другим широко известным турнирным решением – непокрытым множеством (Miller 1980, Fishburn 1977).

Пусть Q – бинарное отношение на X , $Q \subseteq X \times X$. Множество альтернатив, которые Q -доминируют альтернативу x , называется её *верхним срезом* $Q(x) = \{y \in X \mid yQx\}$. Множество альтернатив, которые Q -доминируемы альтернативой x , называется её *нижним срезом* $Q^{-1}(x) = \{y \in X \mid xQy\}$.

Отношение покрытия $C(P|_A)$ и по Миллеру, и по Фишберну есть усиленная версия строгих коллективных предпочтений $P|_A$: $C(P|_A) \subseteq P|_A$.

² По-видимому, это связано с тем, что контекстом данной работы является пространственная теория голосования. В пространственных моделях предполагается, что множество альтернатив имеет мощность континуума. Когда же альтернатив бесконечно много, то не во всяком внешнеустойчивом множестве можно найти минимальное внешнеустойчивое подмножество. Это крайне усложняет анализ предложенного решения.

Альтернатива x *покрывает* альтернативу y по Миллеру в предъявлении A , если x строго лучше y , и любая альтернатива в A , которая строго хуже y , также строго хуже x :
 $x C_M(P|_A)y \Leftrightarrow x P|_A y \wedge P|_A^{-1}(y) \subset P|_A^{-1}(x)$.³

Альтернатива x *покрывает* альтернативу y по Фишберну в предъявлении A , если x строго лучше y , и любая альтернатива в A , которая строго лучше x , также строго лучше y :
 $x C_F(P|_A)y \Leftrightarrow x P|_A y \wedge P|_A(x) \subset P|_A(y)$.

Альтернатива x *нестрого покрывает* альтернативу y по Миллеру $x C_{WM}(P|_A)y \Leftrightarrow P|_A^{-1}(y) \subset P|_A^{-1}(x)$.

Альтернатива x *нестрого покрывает* альтернативу y по Фишберну $x C_{FM}(P|_A)y \Leftrightarrow x P|_A y \wedge P|_A(x) \subset P|_A(y)$.

Важно отметить, что ни для какой из четырех версий отношение $C(P|_A)$ не является сужением отношения $C(P)$ на A : $C(P|_A) \not\subset C(P)|_A$.

Множество альтернатив не покрытых в A никакими альтернативами называется *непокрытым множеством* предъявления A . Множество непокрытых в A альтернатив, которые также не покрыты в A никакими альтернативами нестрого, называется *внутренним непокрытым множеством* предъявления A . Непокрытые множества по Миллеру и Фишберну, а также их внутренние версии обозначаются UC_M и UC_F , UC_{IM} и UC_{IF} , соответственно.

Теорема А.

Пусть $|X| < \infty$. Альтернатива x принадлежит объединению минимальных P -внешнеустойчивых множеств $MPES$ в том и только в том случае, если она строго лучше некоторой альтернативы из непокрытого множества Фишберна или сама принадлежит к этому множеству,

$$x \in MPES \Leftrightarrow \exists y: y \in P^{-1}(x) \cap UC_F \wedge x \in UC_F.$$

Следствие Теоремы А. $MPES = \bigcup_{x \in UC_F} P(x) \cup UC_F$.

³ Включение всегда строгое, так как $y \in P|_A^{-1}(x) \wedge y \notin P|_A^{-1}(y)$.

Теорема В.

Пусть $|X| < \infty$. Альтернатива x принадлежит объединению минимальных R -внешнеустойчивых множеств $MRES$ в том и только в том случае, если она не хуже некоторой альтернативы из внутреннего непокрытого множества Миллера,

$$x \in MRES \Leftrightarrow \exists y: y \in R^{-1}(x) \cap UC_{IM}.$$

Следствие 1 Теоремы В. $x \in MRES \Leftrightarrow \exists y: y \in R^{-1}(x) \cap UC_{IM} \wedge x \in UC_M.$

Следствие 2 Теоремы В. $MRES = \bigcup_{x \in UC_{IM}} R(x) = \bigcup_{x \in UC_{IM}} R(x) \cup UC_M.$

Теорема С.

Пусть $|X| < \infty$. Альтернатива x принадлежит объединению минимальных P -доминирующих множеств MPD в том и только в том случае, если она строго лучше некоторой альтернативы из внутреннего непокрытого множества Фишберна,

$$x \in MPD \Leftrightarrow \exists y: y \in P^{-1}(x) \cap UC_{IF}.$$

Следствие Теоремы С. $MPD = \bigcup_{x \in UC_{IF}} P(x).$

Эти теоремы дают удобный способ вычислять вышеназванные решения. Его описание можно найти в Aleskerov & Subochev (2013).

С помощью Теоремы С также можно показать, что, в отличие от $MPES$ и $MRES$, объединение минимальных P -доминирующих множеств не связано отношением вложения с непокрытым множеством в случае конечного турнира, а следовательно ни с одной из его версий в общем случае.

Теорема С может быть обобщена на случай произвольного топологического пространства альтернатив X . Достаточным условием этого обобщения является компактность общего множества альтернатив X в топологии, порожденной предбазой, состоящей из нижних срезов всех альтернатив по отношению P . В силу этого условия каждое P -доминирующее множество содержит минимальное, а любое минимальное P -доминирующее множество

оказывается конечным. Поскольку любое конечное P -доминирующее множество является P - и R - внешнеустойчивым, а в любом конечном P - или R -внешнеустойчивом множестве есть минимальное P - или R -внешнеустойчивое множество, то данное топологическое условие также оказывается достаточным условием непустоты всех трех исследуемых решений.

Также в общем случае топологического пространства X из Теорем А и В получаются необходимые условия принадлежности альтернативы одному из минимальных P -внешнеустойчивых множеств и одному из минимальных R -внешнеустойчивых множеств.

4. Свойства решений

Основной задачей исследования, результаты которого представлены в докладе, был аксиоматический анализ решений. Теоретиками коллективного выбора были сформулированы следующие свойства или аксиомы для произвольных функций выбора, аргументом которых является предъявление.

Пусть $S(A): 2^X \setminus \emptyset \rightarrow 2^X$ – функция выбора, определенная для всех непустых предъявлений из множества X , $S(A) \subseteq A$.

Наследование (свойство Чернова, свойство α Сена (Sen 1971)). Функция выбора $S(A)$ обладает этим свойством если $\forall A, \forall B, B \subseteq A \Rightarrow S(A) \cap B \subseteq S(B)$.

Монотонность (по предъявлению): $\forall A, \forall B, B \subseteq A \Rightarrow S(B) \subseteq S(A)$.

Слабая монотонность (обратное свойство Чернова): $\forall A, \forall B, (B \subseteq A \wedge B \cap S(A) \neq \emptyset) \Rightarrow S(B) \subseteq S(A)$.

Суперслабая монотонность (свойство β Сена (Sen 1971)): $\forall A, \forall B, (B \subseteq A \wedge S(B) \cap S(A) \neq \emptyset) \Rightarrow S(B) \subseteq S(A)$.

Согласие (аксиома расширения, свойство γ Сена (Sen 1971)): $\forall A, \forall B, S(A) \cap S(B) \subseteq S(A \cup B)$.

Независимость от последовательности выбора: $\forall A, \forall B, S(A \cup B) = S(S(A) \cup B)$.

Идемпотентность: $\forall A, S(S(A)) = S(A)$.

Свойство Айзермана-Алескерова (Aizerman & Aleskerov 1995): $\forall A, \forall B, S(A) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow S(B) \subseteq S(A)$.

Независимость от посторонних альтернатив по Нэшу (Nash 1950) (отбрасывание): $\forall A, \forall B, S(A) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow S(B) = S(A)$.

Если функция выбора зависит, как в рассматриваемом нами случае, ещё и от коллективных предпочтений P , то можно определить свойства, связанные с изменением P .

Монотонность по коллективным предпочтениям (Laslier 1997):

$\forall P, \tilde{P} \subseteq X \times X, \forall A \subseteq X, \forall x \in S(P|_A), (P|_{A \setminus \{x\}} = \tilde{P}|_{A \setminus \{x\}} \wedge \forall y \in A, xPy \Rightarrow x\tilde{P}y) \Rightarrow x \in S(\tilde{P}|_A)$.

Независимость от предпочтений относительно посторонних альтернатив (независимость от проигравших (Laslier 1997)):

$\forall P, \tilde{P} \subseteq X \times X, \forall A \subseteq X, (\forall x \in S(P|_A), \forall y \in A, xPy \Leftrightarrow x\tilde{P}y) \Rightarrow S(P|_A) = S(\tilde{P}|_A)$.

Ни одно турнирное решение не удовлетворяет аксиоме независимости от последовательности выбора и аксиоме монотонности по предъявлению (а также её также слабой и суперслабой версиям).

Теорема D. Функция коллективного выбора MPD не обладает ни одним из перечисленных выше свойств.

Теорема E. Функции коллективного выбора $MPES$ и $MRES$ обладают такими свойствами как независимость от посторонних альтернатив по Нэшу (отбрасывание), идемпотентность, свойство Айзермана-Алескерова, монотонность по коллективным предпочтениям и независимость от предпочтений относительно посторонних альтернатив. При этом они не удовлетворяют аксиоме согласия и аксиоме наследования.

Независимость функции выбора от посторонних альтернатив по Нэшу является более слабым аналогом независимости от посторонних альтернатив по Эрроу. Согласно теореме Эрроу (Arrow 1951) невозможно построить функцию коллективного благосостояния (значением которой является рейтинг альтернатив из X), одновременно удовлетворяющей аксиомам анонимности, нейтральности, Парето-оптимальности и независимости от посторонних альтернатив по Эрроу. Однако, существуют анонимные и нейтральные функции коллективного благосостояния, удовлетворяющие аксиомам Парето-оптимальности и независимости от посторонних альтернатив по Нэшу. Например, таким способом ранжирования является сортировка с помощью турнирных решений,

основанных на правиле большинства и удовлетворяющих свойству независимости от посторонних альтернатив по Нэшу. Таким образом, из теоремы E следует, что турнирные решения *MPES* и *MRES* удобно применять для построения агрегированных ранжирований. Турнирное решение *MPES* было использовано при построении рейтингов научных журналов в работах Алескерова и др. (2011), Алескерова и др. (2013), Aleskerov, Pislyakov & Subochev (2014).

5. Возможность имплементации

Функции коллективного выбора, как было сказано выше, дают нормативное описание выбора, то есть они говорят нам о том, какие альтернативы следовало бы выбрать. Однако, как показывает пример дилеммы заключенных, оптимальная для общества альтернатива может оказаться невыбранной ввиду оппортунистического поведения индивидов, участвующих в принятии коллективных решений. Поэтому необходимо сочетать представления о правильном выборе со структурой и результатами реальных стратегических взаимодействий индивидов, описываемых некооперативной игрой.

Функция коллективного выбора называется *имплементируемой* (реализуемой) с помощью равновесий Нэша, если существует такая некооперативная игра, в которой множество результатов всех равновесий Нэша всегда совпадает с множеством альтернатив, которые в данных условиях (то есть для данного профиля индивидуальных предпочтений) должны быть выбраны согласно рассматриваемой функции коллективного выбора.

Необходимым условием имплементируемости функции коллективного выбора с помощью равновесий Нэша является ее монотонность по Маскину (Maskin 1999). Зафиксируем множество альтернатив, доступных для выбора A . Функция коллективного выбора $SC(\mathfrak{P})$, зависящая от профиля индивидуальных предпочтений \mathfrak{P} называется *монотонной по Маскину*, если $\forall \mathfrak{P}, \tilde{\mathfrak{P}}, \forall x \in SC(\mathfrak{P}), (\forall i \in G, P_i^{-1}(x) \subseteq \tilde{P}_i^{-1}(x) \wedge R_i^{-1}(x) \subseteq \tilde{R}_i^{-1}(x)) \Rightarrow x \in SC(\tilde{\mathfrak{P}})$. То есть монотонность функции выбора по Маскину означает, что любую альтернативу, которая была выбрана (при \mathfrak{P}), выберут снова (при $\tilde{\mathfrak{P}}$), если никто из тех, от чьего мнения зависит выбор, не стал думать о ней хуже.

Известно, что любое турнирное решение немонотонно по Маскину, поскольку это свойство несовместимо с аксиомой нейтральности и принципом Кондорсе. Однако, как было показано Ипек Санвер и Ремзи Санвером (Özkal-Sanver & Sanver 2010), если

предпочтения участников процесса принятия коллективных решений можно расширить с отдельных альтернатив на множества альтернатив, то некоторые турнирные решения имплементировать с помощью равновесий Нэша можно. Достаточным условием их имплементируемости является монотонность по Санверам (она же монотонность относительно покрытия – cover monotonicity). Зафиксируем множество альтернатив, доступных для выбора A . Турнирное решение (зависящая от коллективных предпочтений функция выбора) $SC(P)$ обладает свойством монотонности по Санверам (монотонности относительно покрытия), если

$$\forall P, \tilde{P} \subseteq A \times A, (\forall x \in SC(P), P^{-1}(x) \subseteq \tilde{P}^{-1}(x) \wedge R^{-1}(x) \subseteq \tilde{R}^{-1}(x)) \Rightarrow SC(P) \subseteq SC(\tilde{P}).$$

Теорема F. Функции коллективного выбора $MPES$ и $MRES$ монотонны по Санверам, функция MPD – нет.

Таким образом, турнирные решения $MPES$ и $MRES$ можно имплементировать с помощью равновесий Нэша, хотя и в нестандартных условиях, когда у участников процесса принятия коллективных решений есть предпочтения не только относительно отдельных альтернатив, но и их множеств.

Литература

- Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н. (2013). Построение рейтингов журналов по экономике с помощью методов теории коллективного выбора: препринт WP7/2013/03. Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М.: Изд. дом Высшей школы экономики.
- Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н., Чистяков А.Г. (2011) Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора: препринт WP7/2011/04. Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики».
- Aizerman, M., & Aleskerov, F. (1995). *Theory of Choice*. Amsterdam: North-Holland/Elsevier.
- Aleskerov, F., & Kurbanov, E. (1999). Degree of manipulability of social choice procedures. In A. Alkan, Ch.D. Aliprantis N.C. Yannelis (Eds.), *Current Trends in Economics: Theory and Applications* (pp. 13–27). N.Y.: Springer-Verlag.
- Aleskerov, F.T., Pislyakov, V.V. & Subochev, A.N. (2014). *Ranking Journals in Economics, Management and Political Science by Social Choice Theory Methods*. WP BRP 27/STI/2014. Moscow: HSE.
- Aleskerov F. & Subochev A. (2009). Matrix-vector representation of various solution concepts. Working paper WP7/2009/03. Moscow: SU - Higher School of Economics.
- Aleskerov, F. & Subochev, A. (2013). Modeling optimal social choice: Matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule. *Journal of Global Optimization*, 56(2), 737–756.
- Arrow, K.J. (1951). *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley.
- Condorcet, Marquis de. (1785). *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Paris: L'imprimerie royale.
- Duggan, J. (2011). General conditions for the existence of maximal elements via the uncovered set. *Journal of Mathematical Economics*, 47(6), 755–759.
- Fishburn, P.C. (1977). Condorcet Social Choice Functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33(3), 469–489.
- Laslier, J.F. (1997). *Tournament Solutions and Majority Voting*. Berlin: Springer.
- Maskin, E. (1999). Nash equilibrium and welfare optimality. *The Review of Economic Studies*, 66(1), 23–38.
- May, K.O. (1952). A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions. *Econometrica*, 20(4), 680–684.
- Miller, N.R. (1980). A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting. *American Journal of Political Science*, 24(1), 68–96.

- Nash, J.F. (1950). The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18(2), 155–162.
- von Neumann, J. & Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.
- Özkal-Sanver, İ. & Sanver, M. R. (2010). A new monotonicity condition for tournament solutions. *Theory and Decision*, 69(3), 439–452.
- Sen, A.K. (1971). Choice functions and revealed preferences. *Review of Economic Studies*, 38, 307-317.
- Subochev, A. (2008). Dominant, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions. Working paper WP7/2008/03. Moscow: SU – Higher School of Economics.
- Wuffle, A., Feld, S.L., Owen, G. & Grofman, B. (1989). Finagle’s Law and the Finagle Point, a New Solution Concept for Two-Candidate Competition in Spatial Voting Games Without a Core. *American Journal of Political Science*, 33(2), 348–375.